DEMONSTRATION
SUR LE NOMBRE DES POINTS, OU DEUX LIGNES DES ORDRES QUELCONQUES PEUVENT SE COUPER.

PAR M. EULER.

I.

Dans la Piece précedente j'ai rapporté ſans démonſtration cette propoſition, *que deux lignes courbes algebriques, dont l'une eſt de l'ordre* m *& l'autre de l'ordre* n *ſe peuvent couper en* m n *points.* La verité de cette propoſition eſt reconnuë de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouër, qu'on n'en trouve nulle part une démonſtration aſſés rigoureuſe. Il y a des verites générales, que notre eſprit eſt prêt d'embraſſer auſſitot qu'il en reconnoit la juſteſſe dans quelques cas particuliers: & c'eſt parmi cette eſpece de verités, qu'on peut ranger à bon droit la propoſition, dont je viens de faire mention, puiſqu'on la trouve vraie non ſeulement dans quelques, ou pluſieurs cas, mais auſſi dans une infinité de cas differens. Cependant on conviendra aiſément, que toutes ces preuves infinies ne ſont pas capables de mettre cette propoſition à l'abri de toutes les objections, qu'un adverſaire peut former, & qu'il faut abſolument une démonſtration rigoureuſe, pour le réduire au ſilence.

II. Avant

II. Avant que d'entreprendre la démonſtration de cette propoſition, il en faut bien fixer le ſens, Premierement il eſt à remarquer, que le nombre des interſections de deux lignes, dont l'une eſt de l'ordre m, l'autre de l'ordre n, n'eſt pas néceſſairement $= m\,n$, mais qu'il peut fort ſouvent être plus petit. Ainſi il peut arriver, que deux lignes droites ne ſe coupent point du tout, lorsqu'elles ſont paralleles : & qu'une ligne droite ne coupe une parabole que dans un point : & que deux ſections coniques ne ſe coupent l'une l'autre qu'en deux points, ou point du tout. Ainſi le ſens de notre propoſition eſt, que le nombre des interſections ne peut jamais être plus grand que $m\,n$, quoiqu'il ſoit ſouvent plus petit; & alors on juge, ou que quelques interſections s'éloignent à l'infini, ou qu'elles deviennent imaginaires. De ſorte qu'en contant les interſections à l'infini, & les imaginaires auſſi bien que les réelles, on puiſſe dire, que le nombre des interſections eſt toujours $= m\,n$.

III. Il peut y avoir pourtant des cas, où le nombre des interſections eſt infini, ſi l'on veut regarder la coïncidence de deux lignes égales & ſemblables pour une infinité d'interſections. Ce cas arrivera donc, ſi les deux équations, qui expriment les deux lignes, ſont les mêmes, ou ſi elles ont des facteurs égaux. Mais comme la coïncidence parfaite ne peut pas proprement être regardée comme une infinité d'interſections, puiſque c'eſt plutot un attouchement continuel, le contenu de la propoſition ne ſouffre aucune exception réelle de ce coté là ; & ſi la queſtion roule ſur le nombre d'interſections de deux lignes courbes, on ſuppoſe toujours qu'elles ne ſont ni coïncidentes, ni qu'elles ont des parties, dont l'une tombe parfaitement ſur l'autre. Ainſi on pourra énoncer la propoſition en queſtion de cette maniere : que deux lignes courbes, l'une de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, dont les équations ne ſont, ni les mêmes, ni qu'elles ont aucun commun diviſeur, ne ſe peuvent jamais couper en plus que $m\,n$ points, bien que le nombre des interſections puiſſe fort ſouvent être plus petit.

IV. On reconnoitra aiſément la verité de cette propoſition générale dans une infinité de cas differens, & qui pourroient même tenir

lieu d'une démonſtration, ſi l'on ne ſe piquoit pas de n'avancer rien dans la Geometrie, qui ne ſoit muni d'une démonſtration rigoureuſe. Cependant comme ces preuves particulieres ne contribuënt pas peu à connoitre mieux la propoſition même, & à en faire ſentir l'importance, je commencerai par l'explication de ces preuves, avant que d'entreprendre la démonſtration générale. Et d'abord la verité de cette propoſition eſt reconnuë dans le cas, où l'une des deux lignes, qui ſe coupent, eſt droite, ou du premier ordre, c. à. d. ſi $m = 1$, car alors il eſt aiſé de démontrer que le nombre des interſections d'une ligne de l'ordre n par une ligne droite eſt égal à n, ou plus petit. Car l'équation générale des lignes de l'ordre n étant :

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^2) y^{n-2} + \&c. = 0$$

ſi de l'équation pour une ligne droite quelconque

$$a y + b x + c = 0$$

on ſubſtituë la valeur de $y = -\frac{b x - c}{a}$, on parviendra à une équation, où l'inconnuë x ne monte, qu'à n dimenſions. Donc puiſque chaque interſection eſt marquée par une racine de x de cette équation, il eſt clair que le nombre des interſections eſt égal au nombre des racines de cette équation, & qu'il ne peut pas par conſéquent être plus grand que n. De plus on verra que le nombre des interſections eſt $= n$, ſi toutes les racines ſont réelles, & qu'il ſera plus petit, ſi quelques unes de ces racines ſont imaginaires. Or ſi les plus hautes dimenſions de x ſe détruiſent mutuellement, & que l'équation apres l'elimination de y ſe réduiſe à un degré inferieur, c'eſt une marque, que quelques points d'interſections s'eloignent à l'infini.

V. Soit $m = 2$, & que la ligne du ſecond ordre ſoit compoſée de deux lignes droites, ce qui arrive, lorsque l'équation eſt réſoluble en deux facteurs, comme

$$(a y + b x + c)(d y + e x + f) = 0$$

Or

Or l'autre ligne ſoit une courbe quelconque de l'ordre n, dont la nature ſoit exprimée par cette équation

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^{2}) y^{n-2} + \text{&c.} = 0$$

Dans ce cas il eſt clair, puiſque cette ligne de l'ordre n ne peut être coupée par une ligne droite qu'en n points; que deux lignes droites qui ſont regardées comme une ſeule ligne du ſecond ordre, la pourront couper en $2n$ points, lorsque chacune la coupe en n points: ce qui eſt conforme à l'enoncé de la propoſition, puiſque mn dans ce cas devient $= 2n$.

VI. Si l'une des deux lignes propoſées eſt du troiſieme ordre, mais qu'elle ſoit compoſée de trois lignes droites, l'autre demeurant une courbe quelconque de l'ordre n, il eſt clair que le nombre d'interſections ſera $= 3n$, ou moindre, comme la propoſition exige. Et il en ſera de même d'une ligne de l'ordre quelconque m, ſi elle conſiſte de m lignes droites, ou ſi ſon équation eſt réſoluble en autant d'équations ſimples de cette forme $ay + bx + c = 0$; car puiſque chacune de ces lignes droites peut couper l'autre ligne propoſée de l'ordre n en n points, le nombre de toutes les interſections pourra monter à mn, ſelon l'enoncé de la propoſition. Et partant nous avons déjà une infinité de cas, où la verité de cette propoſition ſe trouve ſolidement établie. Mais dans tous ces cas l'une des deux lignes propoſées, n'eſt pas veritablement une ligne courbe, mais plutot un amas de pluſieurs lignes droites, ſelon l'ordre auquel elle appartient.

VII. Mais il y a auſſi une infinité de lignes courbes où la verité éclate avec autant de clarté. Car ſoit l'une des deux lignes une parabole exprimée par l'équation: $y = axx + bx + c$, & partant $m = 2$: l'autre courbe ſoit exprimée par l'équation générale de l'ordre n:

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta xx) y^{n-2} + \text{&c.} = a.$$

& il eſt evident que ſi l'on met ici par tout pour y ſa valeur $axx + bx + c$, cette équation montera au degré $2n$, & la racine x pourra avoir autant de racines, dont toutes les interſections ſeront indiquées:

donc il ſera poſſible que la ligne de l'ordre n ſoit coupée par la parabole en $2n$ points : & quoique le nombre des interſections puiſſe ſouvent être plus petit, on voit pourtant, qu'il ne peut jamais être plus grand que $2n$.

VIII. La même choſe paroit auſſi, ſi l'une des deux lignes eſt une courbe parabolique d'une ordre quelconque :

$$y = ax^{m} + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

Car ſi l'on met cette valeur pour y dans l'équation pour l'autre courbe de l'ordre n, on verra ſans difficulté, que la lettre x obtiendra dans l'équation reſultante mn dimenſions, qui marquent autant de racines & partant autant d'interſections, tout comme la propoſition prononce. De là on conclura auſſi, comme l'axe des deux courbes eſt arbitraire, quand même l'une des deux courbes ne ſeroit pas exprimée par une telle équation :

$$y = ax^{m} + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

pourvu qu'en changeant d'axe, & même d'inclinaiſon entre les coordonnées, l'équation puiſſe être réduite à cette forme, le nombre des interſections ſera également $= mn$, l'équation qui deſigne les interſections montant toujours à ce degré, ou un inferieur, & jamais à un plus haut.

IX. Ces cas particuliers joints enſemble nous conduiſent à un cas beaucoup plus général, où la verité de la propoſition ſe trouve confirmée. Car toutes les fois que l'équation de la premiere ligne, que je ſupoſe de l'ordre m ſe peut réſoudre en des facteurs, qui expriment, ou lignes droites, ou courbes paraboliques, cette équation étant :

$$(y - P)\ (y - Q)\ (y - R)\ (y - S)\ \&c. = o$$

où P, Q, R, S, &c. ſoient des fonctions rationelles de x, & le premier facteur $y - P = o$ marque une ligne de l'ordre p, le ſecond $y - Q = o$ une de l'ordre q, le troiſieme une de l'ordre r, &c. de ſorte que $p + q + r + s + \&c. = m$, cette ligne ſera compoſée de toutes ces lignes droites ou courbes enſemble : & l'autre courbe, que je ſuppoſe

être

être de l'ordre n, pourra être coupée de la partie de la premiere, qui eſt exprimée par le facteur $y - P = o$, en $p\,n$ points, de la partie compriſe en $y - Q = o$ en $q\,n$ points, de la partie compriſe en $y - R = o$ en $r\,n$ points, &c. Et partant la ligne de l'ordre n pourra être coupée par toutes les parties de la ligne premiere de l'ordre m en $p\,n + q\,n + r\,n + s\,n +$ &c. points, c'eſt à dire en $m\,n$ points, à cauſe de $p + q + r + s +$ &c. $= m$.

X. Quoique ces cas aillent à l'infini, on conviendra neanmoins, qu'il s'en faut encore beaucoup, que la verité de la propoſition ſoit démontrée dans toute ſon étenduë. Et pour parvenir à une telle démonſtration il faut prouver, que deux équations d'ordres quelconques étant propoſées, comme:

$$a y^{m} + (b + c x) y^{m-1} + (d + e x + f x x) y^{m-2} + \text{&c.} = o$$

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x x) y^{n-2} + \text{&c.} = o$$

ſi l'on elimine l'une ou l'autre des deux variables x & y, l'autre ne monte aprés l'elimination qu'à $m\,n$ dimenſions. Il eſt bien vrai qu'il ſeroit impoſſible d'achever en général cette élimination, pour faire voir actuellement, à combien de dimenſions l'autre variable pourroit monter: & même dans la plupart des cas ſi l'on ſe ſert des methodes ordinaires d'eliminer, on parviendra à une équation de plus de dimenſions, que $m\,n$; de ſorte qu'emploiant cette maniere, on devroit plutot croire que la propoſition fut fauſſe. Car quoique l'équation, à laquelle on arrive par ce chemin, ait des diviſeurs, on a lieu de douter, ſi l'on peut negliger ces diviſeurs, & s'ils ne renferment des racines, qui marquent des interſections.

XI. Pour faire ſentir plus évidemment cette difficulté, je m'en vai éliminer ſuivant la maniere ordinaire la quantité y de ces deux équations:

I. $P y^3 + Q y^2 + R y + S = o$.

II. $p y^3 + q y^2 + r y + s = o$.

Où P, Q, R, S, p, q, r, s ſoient des fonctions quelconques de l'autre

tre quantité variable x. Multiplions la premiere par s, & la ſeconde par S, & la difference étant diviſée par y donnera:

III. $(Ps - pS)\,y^2 + (Qs - qS)\,y + Rs - rS = o.$

Enſuite multiplions la premiere par p, & la ſeconde par P, & la difference donnera:

IV. $(Qp - qP)\,y^2 + (Rp - rP)\,y + Sp - sP = o.$

De la même maniere de ces deux équations du ſecond degré nous tirerons deux du premier degré de y:

V. $((Ps-pS)(Sp-sP)-(Qp-qP)(Rs-rS))y+(Qs-qS)(Sp-sP)-(Rp-rP)(Rs-rS)=o.$

VI. $((Qs-qS)(Qp-qP)-(Rp-rP)(Ps-pS))y+(Rs-rS)(Qp-qP)-(Sp-sP)(Ps-pS)=o.$

Et de là on tirera cette équation, ou la quantité y ne ſe trouve plus:

VII. $(Ps-pS)(Sp-sP)(Rs-rS)(Qp-qP)-(Ps-pS)^2(Sp-sP)^2$
$-(Qp-qP)^2(Rs-rS)^2+(Qp-qP)(sR-rS)(Sp-sP)(Ps-pS)=$
$(Qs-qS)^2(Qp-qP)(Sp-sP)-(Qs-qS)(Qp-qP)(Rp-rP)(Rs-rS)$
$-(Rp-rP)(Ps-pS)(Qs-qS)(Sp-sP)+(Rp-rP)^2(Ps-pS)(Rs-rS)$

qui ſe change en celle-cy:

$o=(Ps-pS)^4+2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)^2-(Qp-qP)(Qs-qS)^2(Ps-pS)+(Qp-qP)^2(Rs-rS)^2$
$+(Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)^2+(Rs-rS)(Rp-rP)^2(Ps-pS)-(Qp-qP)(Qs-qS)(Rp-rP)(Rs-rS)$

Mais les derniers termes qui ne contiennent pas le facteur $(Ps-pS)$ ſe reduiſent à:

$(Qp-qP)(Rs-rS)((Qp-qP)(Rs-rS)-(Qs-qS)(Rp-rP))$

ce qui eſt:

$(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)(Qr-qR)$

& partant toute l'equation ſera diviſible par $Ps-pS$ étant:

$(Ps-pS)^4+2(Qp-qP)(Rs-rS)\}(Ps-pS)^2-(Qp-qP)(Qs-qS)^2\}(Ps-pS)+(Qp-qP)(Qr-qR)(Rs-rS)(Ps-pS)$
$+(Rp-rP)(Qs-qS)\}\quad+(Rs-rS)(Rp-rP)^2\}$

XII. Il eſt aſſés clair, que dans ce cas le facteur $Ps-pS$ étant poſé $= o$, ne peut pas marquer une interſection, & que par conſéquent les interſections des deux courbes propoſées ſeront contenuës dans cette équation:

$(Ps-pS)^3+2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)-(Qp-qP)(Qs-qS)^2$
$+(Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)+(Rs-rS)(Rp-rP)^2=o.$
$+(Qp-qP)(Qr-qR)(Rs-rS)$

Donc dans le cas de deux lignes courbes du troiſieme ordre, les coëfficiens

ficients P & p ſeront conſtans ; Q & q des fonctions de x d'une dimenſion comme $\alpha + \beta x$; R & r des fonctions de x de deux dimenſions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; & S & s des fonctions de x de trois dimenſions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$. Par conſéquent les facteurs, qui ſe trouvent dans cette équation ſeront des fonctions de x :

$Ps - pS$ de 3 dim.	$Qs - qS$ de 4 dim.
$Qp - qP$ d'une dim.	$Qr - qR$ de 3 dim.
$Rs - rS$ de 5 dim.	$Rp = rP$ de 2 dim.

d'où il eſt evident, que l'équation, qui indique les interſections ſera de 9 dimenſions, & que par conſéquent, en général deux lignes du 3me ordre ſe peuvent couper en 9 points.

XIII. Ces mêmes équations choiſies :

$$Py^3 + Qy^2 + Ry + S = o$$
$$py^3 + qy^2 + ry + s = o$$

peuvent auſſi montrer le nombre des interſections dans une infinité d'autres cas. Car que la premiere équation exprime une ligne de l'ordre m, & la ſeconde équation une ligne de l'ordre n, ce qui arrivera, quand les coëfficients ſeront des fonctions rationnelles entieres de x : ſavoir

P de $m - 3$ dimenſ.	p de $n - 3$ dim.
Q de $m - 2$ dim.	q de $n - 2$ dim.
R de $m - 1$ dim.	r de $n - 1$ dim.
S de m dim.	s de n dim.

Alors les facteurs, qui conſtituënt l'equation, qui ne contient plus la variable y, ſeront des fonctions de x :

$Ps - pS$ de $m + n - 3$ dim.	$Rp - rP$ de $m + n - 4$ dim.
$Qp - qP$ de $m + n - 5$	$Qr - qR$ de $m + n - 3$
$Rs - rS$ de $m + n - 1$	$Qs - qS$ de $m + n - 2$

Et partant le nombre des interſections de ces deux courbes ſera $= 3m + 3n - 9$; qui eſt toujours plus petit que mn ſi m & n ſont plus grand que 3. Car ſoit : $m = 3 + \alpha$ & $n = 3 + \beta$, le nombre des interſections ſera $= 9 + 3(\alpha + \beta)$ au lieu que $mn = 9 + 3(\alpha + \beta) +$

* β. Mais on voit bien que cette diminution du nombre des interſections vient de ce que les équations choiſies n'expriment pas généralement les courbes des ordres *m* & *n*, mais ſeulement des eſpeces de ces ordres; d'où il n'eſt pas ſurprenant, que le nombre des interſections a été trouvé plus petit, que la propoſition demande.

XIV. Comme l'elimination de l'inconnuë *y* des deux équations cubiques, dont j'ai fait le calcul, a conduit à une équation trop haute, qui n'a été conduite au juſte degré que par la diviſion d'un facteur, dont on pouvoit bien voir qu'il ne renfermoit aucune inrerſection: ainſi dans les équations, où *y* a plus de dimenſion, on parviendra par l'elimination de *y* à une équation encore plus élevée, qüi en verité admettra un diviſeur, mais cette methode, qui ſeroit d'ailleurs impracticable dans de plus hautes équarions, ne nous metrra pas en ſeureté, ſi l'on rrouvera toujours un tel diviſeur, qui ne regarde point les interſections, & encore moins, ſi aprés la diviſion l'équation ſera juſtement d'autant de dimenſions, que la propoſition générale marque; c. à d. ſi le nombre des dimenſions ne ſera jamais plus grand que *mn*, ſi les deux équation propoſées ont été des ordres *m* & *n*. Cette circonſtance prouve donc encore davantage la néceſsité de démontrer la propoſition générale dans toute ſon érenduë, puiſque ſans cela on auroit bien de la raiſon de douter de ſa verité.

XV. C'eſt donc principalement de l'ouvrage de l'elimination, que dépend la démonſtration de notre propoſition générale, où il faut prendre garde, que par l'elimination on ne parvienne à une équation, qui renferme des racines inutiles. Car deux équations étant propoſées, dont chacune contient une même variable *y*, qui doit être eliminée, on voit aiſément que l'elimination ſe peut faire d'une infinité de manieres differentes, ſelon qu'on multiplie l'une & l'autre équation par une quantité arbitraire. Il s'agit donc de bien fixer l'idée de l'elimination, & de diriger cette opération, en ſorte que l'equation, à laquelle on arrive, ne contienne d'autres racines, que telles, qui marquent des interſections, & qu'on puiſſe être aſſüré, qu'elle ne renferme des facteurs ſuperflus, dont on pourroit douter s'ils indiquent des interſections, ou non?

XVI. Soient

XVI. Soient donc propoſées deux équations quelconques :

$$y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} + Ry^{m-3} - Sy^{m-4} + \&c. = 0$$

$$y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} + ry^{n-3} - sy^{n-4} + \&c. = 0$$

leſquelles il faille combiner, en ſorte qu'il en réſulte une équation qui ne contienne plus la lettre y. Or d'abord on voit que la valeur de y, qui reſulte d'une de ces équations doit être égale à la valeur de y, qui réſulte de l'autre. Donc ſi l'une & l'autre équation donne pluſieurs valeurs de y, les deux équations propoſées pourront ſubſiſter enſemble, ſi une valeur quelconque de y de l'une ſera égale à une valeur quelconque de y de l'autre. Suppoſons que toutes les racines de la premiere équation ſoient :

A, B, C, D, E, F, G &c.

& les racines de l'autre équation :

a, b, c, d, e, f, g &c.

Cela poſé, il eſt clair que chacune des deux équations propoſées aura lieu dans tous les cas, qu'une des racines de la premiere équation ſera égale à une des racines de l'autre.

XVII. Le nombre des racines A, B, C, D &c. de la premiere équation ſera $= m$, & le nombre des racines de l'autre équation ſera $= n$; donc les équations propoſées pourront être répreſentées ſous ces formes :

$(y - A)\ (y - B)\ (y - C)\ (y - D)\ (y - E)\ \&c. = 0.$

$(y - a)\ (y - b)\ (y - c)\ (y - d)\ (y - e)\ \&c. = 0.$

A préſent il eſt clair que ſi $A = a$, la valeur $y = A = a$ ſatisfera à l'une & à l'autre équation ; la même choſe arrivera ſi $A = b$; ou $A = c$; ou $A = d$; ou $A = e$; &c. de plus la valeur $y = B$ ſatisfera à l'une & à l'autre, ſi $B = a$, ou $B = b$; ou $B = c$; ou $B = d$; ou $B = e$; &c. & la valeur $y = C$ ſatisfera à toutes les deux équations ſi $C = a$, ou $C = b$; ou $C = c$; ou $C = d$; ou $C = e$; &c. & ainſi des autres. Et il eſt evident, que toutes ces combinaiſons enſemble répreſentent tous les cas poſſibles, où les deux équations propoſées pourront ſubſiſter à la fois.

XVIII. Donc puisque l'équation, qu'on cherche par l'élimination, doit contenir tous les cas posſibles, où la même valeur miſe pour y ſatisfait à l'une & à l'autre équation à la fois, il eſt clair qu'elle doit contenir tous les cas marqués, & partant elle ſera compoſée de tous ces facteurs

$$\left.\begin{array}{lllll} (A-a) & (A-b) & (A-c) & (A-d) & (A-e)\ \&c. \\ (B-a) & (B-b) & (B-c) & (B-d) & (B-e)\ \&c. \\ (C-a) & (C-b) & (C-c) & (C-d) & (C-e)\ \&c. \\ (D-a) & (D-b) & (D-c) & (D-d) & (D-e)\ \&c. \\ (E-a) & (E-b) & (E-c) & (E-d) & (E-e)\ \&c. \end{array}\right\} = 0.$$

&c.

Donc, puiſque la quantité y ne ſe trouve plus dans cette équation, elle ſera la même qu'on cherche par l'élimination, & qui montre tous les cas, où les deux équations propoſées peuvent avoir la même racine. Mais comme les racines A, B, C, D &c. a, b, c, d &c. ſont ſouvent impoſſibles d'être aſſignées, il s'agit d'exprimer cette équation par les coëfficients P, Q, R, S &c. p, q, r, s &c. dont le rapport aux racines eſt connu.

XIX. Parceque, comme nous avons vu, le produit de tous ces facteurs $(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)(y-e)$ &c. eſt égal à l'expreſſion $y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} -$ &c. ſi nous ſubſtituons ſucceſſivement pour y les valeurs A, B, C, D &c. l'équation, qui doit réſulter par l'élimination, ſera compoſée de ces facteurs:

$$\left.\begin{array}{l} (A^n - pA^{n-1} + qA^{n-2} - rA^{n-3} + sA^{n-4} - \&c.) \\ (B^n - pB^{n-1} + qB^{n-2} - rB^{n-3} + sB^{n-4} - \&c.) \\ (C^n - pC^{n-1} + qC^{n-2} - rC^{n-3} + sC^{n-4} - \&c.) \\ (D^n - pD^{n-1} + qD^{n-2} - rD^{n-3} + sD^{n-4} - \&c.) \\ (E^n - pE^{n-1} + qE^{n-2} - rE^{n-3} + sE^{n-4} - \&c.) \end{array}\right\} = 0.$$

&c.

où

où le nombre de ces facteurs eſt $= m$, ſelon le nombre des racines de la premiere équation. D'où eſt il evident auſſi que changeant les équations, l'equation, qui reſulte par l'elimination, peut être repréſentée auſſi ſous cette forme:

$$\left.\begin{array}{l}
(a^m - Pa^{m-1} + Qa^{m-2} - Ra^{m-3} + Sa^{m-4} - \&c.)\\
(b^m - Pb^{m-1} + Qb^{m-2} - Rb^{m-3} + Sb^{m-4} - \&c.)\\
(c^m - Pc^{m-1} + Qc^{m-2} - Rc^{m-3} + Sc^{m-4} - \&c.)\\
(d^m - Pd^{m-1} + Qd^{m-2} - Rd^{m-3} + Sd^{m-4} - \&c.)\\
(e^m - Pe^{m-1} + Qe^{m-2} - Re^{m-3} + Se^{m-4} - \&c.)\\
\&c.
\end{array}\right\} = 0.$$

où le nombre des facteurs eſt $= n$.

XX. Quoique les expreſſions des racines A, B, C, D &c. & a, b, c, d &c. ſoient pour la pluspart fort irrationelles, & ſouvent telles, qu'on ne les peut pas aſſigner; on ſait pourtant que la ſomme de toutes les racines A, B, C, D &c. eſt $= P$

la ſomme des produits de deux à deux $= Q$

la ſomme des produits de trois à trois $= R$

la ſomme des produits de quatre à quatre $= S$

&c.

Et par ces valeurs P, Q, R, S &c. on eſt en état d'exprimer toutes les expreſſions, dans leſquelles entrent toutes les racines également, par des formules rationnelles compoſées de P, Q, R, S &c. Or on voit aiſément, que ſi l'on multiplie les facteurs mentionnés actuellement, on parviendra toujours à de ſemblables expreſſions, qui renferment toutes les racines également, & au lieu deſquelles on pourra mettre des fonctions rationnelles des coëfficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c. Cela eſt auſſi clair par la double forme de cette équation du §. preced. Car s'il reſtoit dans la premiere forme quelque irrationalité, ce ſeroit une irrationalité de la premiere équation, mais

par la ſeconde forme nous voyons, qu'il n'y peut y avoir une irrationalité de la premiére équation. D'où il s'enſuit, que l'une & l'autre forme doit conduire à la même expreſſion rationnelle, qui ne renferme que les coëfficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c.

XXI. Si nous réflechiſſons maintenant, que dans les équations propoſées

$$y^{m} - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} - \&c. = o$$
$$y^{n} - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} - \&c. = o$$

entant qu'elles expriment des lignes des ordres m & n les coëfficients P & p marquent des fonctions du premier degré de x comme $\alpha + \beta x$; les coëfficients Q & q des fonctions du ſecond degré $\alpha + \beta x + \gamma xx$; les coëfficients R & r des fonctions du troiſieme degré $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ &c. Donc la ſomme des racines A, B, C, D &c. ou a, b, c, d, e &c. ſera exprimée par une fonction de x d'un degré. La ſomme des produits de deux à deux de ces racines par une fonction du ſecond degré: la ſomme des produits de trois à trois racines par une fonction du troiſieme degré, & ainſi de ſuite. C'eſt pourquoi dans la compoſition de toutes ces racines dans la premiere forme (§. XVIII.) on pourra regarder chaque racine comme une fonction d'une dimenſion de x: & partant cette forme étant compoſée de mn facteurs ſimples, elle montera à mn dimenſions de x & déſignera par conſéquent mn interſections des deux courbes propoſées.

XXII. S'il y a dans cette démonſtration encore quelque obſcurité, cela vient de ſa grande univerſalité: & tous les doutes qu'on en pourroit avoir évanouïront entierement, dèsqu'on fera l'application à quelques cas particuliers, d'où l'on reconnoitra dabord, que tout ce que je viens d'avancer ſur les dimenſions de chaque partie, doit avoir lieu non ſeulement dans ces cas, mais auſſi en général. Je commencerai par deux équations du ſecond ordre, qui ſoient

	Les racines
$yy - Py + Q = o$	A, B
$yy - py + q = o$	a, b

donc

donc, puisque $m = 2$ & $n = 2$, l'équation, où l'élimination doit conduire, ſera :

$$(A^2 - pA + q)(B^2 - pB + q) = 0$$

qui étant développée, donnera :

$$A^2B^2 - pAB(A+B) + q(A^2+B^2) + ppAB - pq(A+B) + qq = 0$$

Or ayant $AB = Q$ & $A + B = P$, il ſera $AA + BB = PP - 2Q$: par conſéquent l'équation cherchée ſera :

$$Q^2 - pPQ + qPP - 2Qq + ppQ - pqQ + qq = 0$$

dont chaque terme ſera de quatre dimenſions de x pourvu que P & p renferment une dimenſion de x, & Q & q deux.

XXIII. Soient les deux équations propoſées du troiſieme ordre :

	Les racines étant
$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$	A, B, C & $m = 3$
$y^3 - py^2 + qy - r = 0$	a, b, c & $n = 3$

Donc l'équation cherchés par l'élimination de y ſera :

$$(A^3 - pA^2 + qA - r)(B^3 - pB^2 + qB - r)(C^3 - pC^2 + qC - r) = 0$$

qui par le developpement deviendra :

$$A^3B^3C^3 - pA^2B^2C^2(AB+AC+BC) + qABC(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) - r(A^3B^3+A^3C^3+B^3C^3)$$
$$+ p^2A^2B^2C^2(A+B+C) - pqABC(A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2) - p^3A^2B^2C^2$$
$$+ q^2ABC(A^2+C^2+C^2) + pr(A^3B^2+A^2B^3+A^3C^2+A^2C^3+B^3C^2+B^2C^3) + q^3ABC$$
$$+ r^2(A^3+B^3+C^3) - qr(A^3B+AB^3+A^3C+AC^3+B^3C+BC^3) - r^3$$
$$+ p^2qABC(AB+AC+BC) + pqr(A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2)$$
$$- p^2r(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) - q^2r(AB+AC+BC)$$
$$- pq^2ABC(A+B+C) + qr^2(A+B+C)$$
$$- pr^2(A^2+B^2+C^2) = 0$$

où il faut remarquer que :

$A + B + C = P$	d'une dimenſion de x
$AB+AC+BC = Q$	de deux dimenſions
$ABC = R$	de trois dimenſions.

XXIV. Pour les autres expreſſions on les trouvera formées des coëfficients P, Q, R en ſorte :

$A^2 + B^2 + C^2 = P^2 - 2Q$ de 2 dimenſ.

$A^2B + AB^2 + A^2C + AC^2 + B^2C + BC^2 = PQ - 3R$ de 3 dimenſ.

$A^3 + B$

$A^3 + B^3 + C^3 = P^3 - 3PQ + 3R$ de 3 dim.

$A^3B + AB^3 + A^3C + AC^3 + B^3C + BC^3 = P^2Q - PR - 2Q^2$ de 4 dim.

$A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2 = Q^2 - 2PR$ de 4 dim.

$A^3B^2 + A^2B^3 + A^3C^2 + A^2C^3 + B^3C^2 + B^2C^3 = PQ^2 - 2P^2R - QR$ de 5 dim.

$A^3B^3 + A^3C^3 + B^3C^3 = Q^3 - 3PQR + 3RR$ de 6 dim.

d'où l'on voit clairement, puisque p, q, & r ſont des fonctions d'une, 2 & 3 dimenſions de x, que tous les termes renferment le même nombre de dimenſions de x, & que ce nombre eſt $= 9$, comme l'enoncé de la propoſition exige. Or cette ſubſtitution donnera l'equation ſuivante par l'elimination de la variable y:

$$+R^3 - pQR^2 + qQ^2R - 2qPR^2 - rQ^3 + 3rPQR - 3rR^2$$
$$- r^3 + qr^2P - q^2rQ + 2pr^2Q + q^3R - 3pqrR + 3r^2R$$
$$+p^2PR^2 - pqPQR + 3pqRR + prPQ^2 - 2prP^2R - prQR + q^2P^2R$$
$$- pr^2P^2 + pqrPQ - 3r^2PQ - pq^2PR + 2p^2rPR + qrPR - p^2rQ^2$$
$$+ rrP^3 - 2qqQR - qrP^2Q$$
$$- p^3R^2 + 2qrQQ + ppqQR = o.$$

XXV, Cet exemple ſervira à nous convaincre en général, ſi les deux équations propoſées ſont:

$$y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} \ldots \pm V = o$$
$$y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} \ldots \pm v = o$$

où P & p ſont des fonctions d'une dimenſion de x; Q & q de deux; R & r de trois &c. & les derniers termes V de m dimenſions & v de n dimenſions: que le premier terme, que l'equation du §. XIX. réſultante par l'elimination fournit, ſera $A^n B^n C^n D^n$ &c. $= V^n$ & partant de mn dimenſions de x, & puiſqu'on voit auſſi clairement, que tous les autres termes pouvant être exprimés par les lettres P, Q, R &c. & p, q, r &c. doivent contenir le même nombre de dimenſions de x, il eſt inconteſtablement démontré, que l'equation, à laquelle on parvient par l'elimination de la lettre y, ſera de mn dimenſions de x: tout comme la propoſition générale avance.

SUITE